

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+3y}}$$

Sea la sustitución.

$$z^2 = x + 3y \Rightarrow 2z \frac{dz}{dx} = 1 + 3 \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{2}{3} z \frac{dz}{dx} - \frac{1}{3} = \frac{dy}{dx}$$

Aplicamos el cambio

$$\frac{2}{3} z \frac{dz}{dx} - \frac{1}{3} = \frac{1}{z} \Rightarrow 2z \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{3}{z} \Rightarrow 2z \frac{dz}{dx} = \frac{3}{z} + 1 \Rightarrow 2z \frac{dz}{dx} = \frac{3+z}{z}$$

Queda entonces

$$\frac{2z^2}{3+z} \frac{dz}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{2z^2}{3+z} dz = dx$$

Integramos, ante todo la primera hay que dividir polinomio

$$\frac{z^2}{3+z} = z - 3 + \frac{9}{z+3}$$

Queda la integración.

$$2 \left(\frac{z^2}{2} - 3z + 9 \ln(z+3) \right) = x \Rightarrow z^2 - 6z + 18 \ln(z+3) = x$$

Regresando el cambio.

$$x + 3y - 6\sqrt{x+3y} + 18 \ln(\sqrt{x+3y} + 3) = x$$

Despejando "y"

$$y = 2\sqrt{x+3y} - 6 \ln(\sqrt{x+3y} + 3) + C$$

Resultado que se obtiene directo si se cambia las variables de la ecuación.

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{x+3y}$$

Mismo cambio de variable.

$$\frac{dx}{dy} = 2z \frac{dz}{dy} - 3 \Rightarrow 2z \frac{dz}{dy} - 3 = z \Rightarrow 2z \frac{dz}{dy} = z + 3 \Rightarrow \frac{2z}{z+3} dz = dy$$

Integrando.

$$y = 2 \int \left(1 - \frac{3}{z+3} \right) dz \Rightarrow y = 2(z - 3 \ln(z+3)) + C$$

Regresando el cambio de variable.

$$y = 2\sqrt{x+3y} - 6 \ln(\sqrt{x+3y} + 3) + C$$

.- Comprobemos que en si es la solución. Para ello derivamos.

$$y' = 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x+3y}} (1+3y') \right) - 6 \left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}+3} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x+3y}} (1+3y') \right)$$

Agrupamos de un lado las "y"

$$y' \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x+3y}} + \frac{9}{(\sqrt{x+3y}+3)(\sqrt{x+3y})} \right) = \frac{1}{\sqrt{x+3y}} - \frac{3}{(\sqrt{x+3y}+3)(\sqrt{x+3y})}$$

Simplificamos

$$y' \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+3y}} \left(-3 + \frac{9}{\sqrt{x+3y}+3} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{x+3y}} \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x+3y}+3} \right)$$

$$y' \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+3y}} \left(-\frac{3\sqrt{x+3y}}{\sqrt{x+3y}+3} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{x+3y}} \left(\frac{\sqrt{x+3y}}{\sqrt{x+3y}+3} \right)$$

$$y' \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x+3y}+3} \right) = \frac{1}{\sqrt{x+3y}+3}$$

$$y' \left(\frac{\sqrt{x+3y}}{\sqrt{x+3y}+3} \right) = \frac{1}{\sqrt{x+3y}+3} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x+3y}}$$